ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH VỚI HÀM TÙY Ý VÀ MỘT SỐ LỚP HÀM LỒI LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH VỚI HÀM TÙY Ý VÀ MỘT SỐ LỚP HÀM LỒI LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
(Xác nhận)

PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Bảng ký hiệu **1**

Mở đầu **3**

Chương 1. Một số giá trị trung bình sơ cấp **5**

1.1 Một số giá trị trung bình sơ cấp 5

1.1.1 Giá trị trung bình thông thường 5

1.1.2 Trung bình có trọng 6

1.1.3 Một số tính chất của trung bình $\mathcal{M}_r(a)$ 7

1.2 Hàm so sánh được 9

1.2.1 Bất đẳng thức thuần nhất 9

1.2.2 Một số hàm so sánh được 13

Chương 2. Giá trị trung bình với hàm tùy ý và một số lớp hàm lồi liên quan **18**

2.1 Tính chất đặc trưng của giá trị trung bình 18

2.1.1 Các giá trị trung bình tương đương 20

2.1.2 Tính chất đặc trưng của giá trị trung bình $\mathcal{M}_r$ . . 21

2.2 Một số lớp hàm lồi liên quan 24

2.2.1 Hàm lồi liên tục 24

2.2.2 Hàm lồi hai lần khả vi 33

2.2.3 Hàm lồi nhiều biến 35

2.3 Một số dạng toán liên quan 37

2.3.1 Mở rộng bất đẳng thức Hölder 37

2.3.2 Mở rộng bất đẳng thức Minkowski 39

Kết luận **43**

Tài liệu tham khảo **44**

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}^*$	tập các số tự nhiên dương
(a)	dãy các số thực
$\mathcal{M}_r(a)$	trung bình bậc r
$\mathcal{A}(a)$	trung bình cộng
$\mathcal{G}(a)$	trung bình nhân

Mở đầu

Bất đẳng thức có vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như một công cụ đắc lực của các mô hình toán học liên tục cũng như các mô hình toán học rời rạc trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn v.v... Trong hầu hết các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán khu vực và quốc tế, thi Olympic Toán sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức hay được đề cập và thường thuộc loại khó hoặc rất khó. Các bài toán về ước lượng và tính giá trị cực trị (cực đại, cực tiểu) của các tổng, tích cũng như các bài toán xác định giới hạn của một số biểu thức cho trước thường có mối quan hệ ít nhiều đến các tính toán, ước lượng (bất đẳng thức) tương ứng.

Trong bất đẳng thức, thứ tự sắp xếp giữa các đại lượng trung bình của bộ số thực dương đóng một vai trò quan trọng trong việc so sánh giá trị giữa các đại lượng trung bình đó. Ngoài thứ tự sắp xếp của một số đại lượng trung bình thông thường như trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa v.v..., người ta còn quan tâm đến giá trị trung bình với hàm tùy ý và một số lớp hàm lồi liên quan.

Mục đích của luận văn nhằm khảo sát các tính chất của giá trị trung bình với hàm tùy ý và một số lớp hàm lồi liên quan.

Nội dung của đề tài luận văn được trình bày trong 2 chương. Chương 1 "Một số giá trị trung bình sơ cấp": trình bày các kiến thức về giá trị trung bình thông thường, định lý về trung bình cộng và trung bình nhân, một số tính chất của trung bình. Các kiến thức của chương này được viết trên cơ sở tổng hợp từ các tài liệu [1] và [2]. Chương 2 "Giá trị trung bình với hàm tùy ý và một số lớp hàm lồi liên quan": trình bày tính chất đặc trưng của giá trị trung bình với hàm tùy ý và một số lớp hàm lồi liên quan. Các kiến thức của chương này được viết trên cơ sở các tài liệu [1], [2], [3] và [4].

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô của khoa Toán - Tin và các thầy cô trong trường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu Trường THPT Bạch Đằng, Thủy Nguyên, Hải Phòng và các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học.

Xin cảm ơn các anh chị học viên lớp Cao học Toán K10B1 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Hương

Chương 1

Một số giá trị trung bình sơ cấp

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất của giá trị trung bình sơ cấp. Các kiến thức của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1] và [2].

1.1 Một số giá trị trung bình sơ cấp

Mục này trình bày các kiến thức về: giá trị trung bình thông thường, định lý về trung bình cộng và trung bình nhân, một số tính chất của trung bình.

1.1.1 Giá trị trung bình thông thường

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$. Xét tập dãy các số dương

$$(a) := (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n);$$
$$(b) := (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n).$$

Ký hiệu dãy không là dãy gồm toàn số 0, nghĩa là $(0) := (0, 0, \ldots, 0)$.

Định nghĩa 1.1.1 Ta nói dãy (a) tỷ lệ với dãy (b) nếu tồn tại hai số α và β không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha a_i = \beta b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nhận xét 1.1.2 (i) Từ định nghĩa này ta thấy dãy (0) tỷ lệ với mọi dãy (a).

(ii) Nếu hai dãy (a) và (b) tỷ lệ và cả hai dãy đều khác dãy (0) thì $b_i = 0$ nếu $a_i = 0$.

Sau đây là định nghĩa về trung bình bậc r với $r \neq 0$ là một số thực cho trước.

Định nghĩa 1.1.3 Tổng $\mathcal{M}_r(a)$ được định nghĩa bởi:

$$\mathcal{M}_r(a) := \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r\Big)^{1/r}, \tag{1.1}$$

được gọi là một trung bình bậc r, ở đây $(a) := (a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một dãy gồm n số không âm.

Nếu đặt

$$\mathcal{A}(a) := \mathcal{M}_1(a) \tag{1.2}$$

$$\mathcal{H}(a) := \mathcal{M}_{-1}(a) \tag{1.3}$$

và

$$\mathcal{G}(a) := \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \tag{1.4}$$

thay tương ứng vào công thức (1.1), ta nhận được trung bình cộng thông thường

$$\mathcal{A}(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

trung bình điều hòa

$$\mathcal{H}(a) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\Big)^{-1}$$

và trung bình nhân $\mathcal{G}(a)$ tương ứng.

1.1.2 Trung bình có trọng

Giả sử

$$p_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.5}$$

và đặt

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_r(a) = \mathcal{M}_r(a,p) = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)^{1/r}, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{M}_r = 0 \quad (r < 0 \text{ và một số số } a = 0) \tag{1.7}$$

và

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(a,p) = \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}\right)^{1/\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}. \tag{1.8}$$

Vì trung bình là hàm thuần nhất bậc không đối với p, nên không làm mất tính tổng quát ta giả sử $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Khi đó ta sẽ viết q_i thay cho p_i như sau:

$$\mathcal{M}_r(a) = \mathcal{M}_r(a,p) = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^r\right)^{1/r} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} q_i = 1\right) \tag{1.9}$$

và

$$\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(a,p) = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} q_i = 1\right). \tag{1.10}$$

Định nghĩa 1.1.4 Xét các số thực r khác 0. Khi đó tổng $\mathcal{M}_r(a,p)$ xác định theo công thức (1.9) được gọi là trung bình bậc r theo trọng (q).

Nhận xét 1.1.5 (i) Ứng với $r = -1$, $r = 1$ và $r = 2$ ta lần lượt nhận được các trung bình điều hòa, trung bình cộng và trung bình bình phương.

(ii) Trung bình có trọng trở thành trung bình thông thường khi $p_i = 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

1.1.3 Một số tính chất của trung bình $\mathcal{M}_r(a)$

Để chứng minh các tính chất của trung bình $\mathcal{M}_r(a)$, ta cần sử dụng bất đẳng thức sau đây.